2019 年 5 月 20 日の講義中の補題について
2019 年 5 月 20 日作成

2019 年 5 月 20 日の講義中では, 次を用いて Cauchy–Goursat の定理の証明を行った (記号については講義中の板書を参照): 「任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, 十分大きい自然数 n 及び各元 $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{2n}\}$ について適切に点 $z_j^{(n)} \in R_j^{(n)}$ を定めることで, 次が成立するようにできる: 各元 $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{2n}\}$ について, 任意の点 $z \in R_j^{(n)} \setminus \{z_j^{(n)}\}$ に対して

$$\left| \frac{f(z) - f\left(z_j^{(n)}\right)}{z - z_j^{(n)}} - f'\left(z_j^{(n)}\right) \right| < \varepsilon$$

が成立する. 」詳細は 6 月 3 日の講義内で補足/訂正するが, これについて正確には以下で述べる手順で正方形 R の分割を行う.

以下では固定した正数 $\varepsilon > 0$ について議論を行う. 自然数 n 及び元 $j \in \{1, 2, \ldots, 2^{2n}\}$ について, 次の性質を考える:

(性質)$_{(n,j)}$: ある点 $z_j^{(n)} \in R_j^{(n)}$ として, 任意の点 $z \in R_j^{(n)} \setminus \{z_j^{(n)}\}$ に対して

$$\left| \frac{f(z) - f\left(z_j^{(n)}\right)}{z - z_j^{(n)}} - f'\left(z_j^{(n)}\right) \right| < \varepsilon$$

なるものが存在する. □

Step 1: まず正方形 $R = R^{(0)}$ について考える. もし **(性質)**$_{(0,1)}$ が成立した場合には, ここで分割を終了する. そうでない場合には, 講義で述べた通りの分割 $R^{(0)} = R_1^{(1)} \cup R_2^{(1)} \cup R_3^{(1)} \cup R_4^{(1)}$ を考える.

Step 2: もしも全ての元 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ について **(性質)**$_{(1,j)}$ が成立する場合には, ここで分割を終了する. そうでない場合には, 各 $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ について, それぞれの正方形 $R_j^{(1)}$ の分割を考える. (講義ではこのステップで $R_j^{(1)}$ を必ず 4 等分していたが) 実際にはもし **(性質)**$_{(1,j)}$ が成立している場合にはこれ以上この $R_j^{(1)}$ は分割しない. **(性質)**$_{(1,j)}$ が成立しないような $R_j^{(1)}$ についてのみ, これを講義で述べた方法で 4 つのより小さい正方形に分割する. このようにして得た分割を, $R^{(0)} = R_1^{(2)} \cup R_2^{(2)} \cup \cdots \cup R_{N_2}^{(2)}$ とする ($4 < N_2 \leq 2^4$).

以降同様の方法で, 順次分割

$$R^{(0)} = R_1^{(n)} \cup R_2^{(n)} \cup \cdots \cup R_{N_n}^{(n)} \quad (N_n \leq 2^{2n})$$

を得る. 講義で述べた分割との違いは, 例えば「全ての $R_j^{(n)}$ が同じ大きさの (つまり一片の長さが $L/2^n$ の) 正方形とは限らず, より大きな正方形も混ざっている可能性がある」という点などにある.

有限回のステップで上記の方法による分割が完了した場合については, 講義で述べたのと全く同様の議論によって Cauchy–Goursat の定理の証明が完了する. つまり, ある自然数 n について分割 $R^{(0)} = R_1^{(n)} \cup R_2^{(n)} \cup \cdots \cup R_{N_n}^{(n)}$ が, 次を満たしている場合を考える: 任意の $j \in \{1, 2, \ldots, N_n\}$ について **(性質)**$_{(n,j)}$ が成立している. この場合, 各 $R_j^{(n)}$ の境界を正の向きに回る loop を $C_j^{(n)}$ として, 講義で述べたのと全く同じ理由から

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N_n} \int_{C_j^{(n)}} f(z)\,dz$$

を得る. **(性質)**$_{(n,j)}$ にあるような点 $z_j^{(n)}$ を固定して, 各 $R_j^{(n)}$ 上での関数 $\delta_j^{(n)}$ を

$$\delta_j^{(n)}(z) := \begin{cases} 0 & (z = z_j^{(n)}) \\ \frac{f(z) - f\left(z_j^{(n)}\right)}{z - z_j^{(n)}} - f'\left(z_j^{(n)}\right) & (z \neq z_j^{(n)}) \end{cases}$$

として, 講義で述べた議論から

$$\left| \int_{C_j^{(n)}} f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon \cdot \left(\max_{z, w \in R_j^{(n)}} |z - w| \right) \cdot (C_j^{(n)} \text{の長さ})$$

を得る．従って $R_j^{(n)}$ の一片の長さを $L_j^{(n)}$ とすれば，

$$\left|\int_{C_j^{(n)}} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon \cdot 4\sqrt{2}\left(L_j^{(n)}\right)^2$$

を得る．ここで構成と帰納法により

$$\sum_{j=1}^{N_n}\left(L_j^{(n)}\right)^2 = L^2$$

なることが簡単に示せる．これに気を付けると，以上を組み合わせることで

$$\left|\int_{C} f(z)\,dz\right| \leq \varepsilon \cdot 4\sqrt{2}L^2$$

を得る．正数 ε は任意だったので，証明が完結する．

以下では有限回のステップで確かに上記分割が完了することを示す．つまり:

Lemma 0.1. ある自然数 n が存在し，上記の手順で得た R の分割 $R = R_1^{(n)} \cup R_2^{(n)} \cup \cdots \cup R_{N_n}^{(n)}$ は次を満たす: 任意の $j \in \{1, 2, \ldots, N_n\}$ について **(性質)**$_{(n,j)}$ が成立する． □

以下これの証明について述べる．証明は背理法による．もし補題が成立しないならば，R の内側に無限に続く正方形の包含列

$$R^{(0)} \supset R_{j_1}^{(1)} \supset R_{j_2}^{(2)} \supset \cdots$$

が存在して，各 n で $R_{j_n}^{(n)}$ は **(性質)**$_{(n,j_n)}$ を満足しない $(1 \leq j_n \leq N_n)$．

まずこれらの交わり

$$Z := \bigcap_{n \geq 0} R_{j_n}^{(n)}$$

が空でないことに気を付ける．実際，各 $R_{j_n}^{(n)}$ の点 p_n をとると R の点列 $\{p_n\}_n$ を得るが，R は複素平面 $\mathbb{C}$ の有界閉集合であるので，必要に応じて部分列 $\{p_{n_k}\}_k$ を取ることで，これがある点 $p_\infty \in R$ に収束するとしてよい．また各自然数 k について，k より大なる任意の自然数 ℓ について p_{n_ℓ} は $R_{j_k}^{(n_k)}$ に入っている．$R_{j_k}^{(n_k)}$ は閉集合であるので，$p_\infty \in R_{j_k}^{(n_k)}$ を得る．よって $p_\infty \in Z$ であることから，確かに $Z \neq \emptyset$ と分かる．

さて点 $z_0 \in Z$ を固定する．関数 f は R を含むある領域上で正則としていたので，特に f は z_0 で複素微分可能である．よってある正数 $\delta > 0$ として，次を満たすようなものが取れる: 任意の点 $z \in R_{z_0}(\delta) := \{z \in R \mid |z - z_0| < \delta\}$ に対して，

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon$$

が存在する．一方で各正方形 $R_{j_n}^{(n)}$ の直径は $n \to 0$ で 0 に収束するため，十分大きい自然数 n に対しては，$R_{j_n}^{(n)} \subset R_{z_0}(\delta)$ である．ここで $z_0 \in Z \subset R_{j_n}^{(n)}$ に気を付けると，これは $R_{j_n}^{(n)}$ が **(性質)**$_{(n,j_n)}$ を満足しないことに矛盾する． □