1　レポートについて

本日分のレポートについて, あまり出来が良くいように思われたため, 補足します. まず次の事実を用いていました:

Proposition 1.1. ある C^∞-級関数 $\rho\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ として以下を満たすようなものが存在する:
(*i*) 任意の実数 x に対して, $|x|\le 1$ ならば $\rho(x)=1$,
(*ii*) 任意の実数 x に対して, $1<|x|<2$ ならば $0<\rho(x)<1$,
(*iii*) 任意の実数 x に対して, $|x|\ge 2$ ならば $\rho(x)=0$. □

証明については, 例えば [1] の 176–179 項などをご参照ください (レポートにこの関数の構成まで遡って書いてくださっている方が複数人いらっしゃいました, 大変素晴らしいです. ですが大変だと思うので, この講義では以降は上記命題はこの形で認めて使ってしまっていただいても結構です). これを認めたうえで, 以下でレポートの模範解答を書いてみます.

領域 $D:=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<3\}$ 上の ($\mathbb{R}$ 値, 又は $\mathbb{C}$ 値と思っても当然よい) 関数 f を,

$$f(z):=\rho(|z|)$$

で定める. 明らかに f は D 上の C^∞ 関数である.

次に D 内の loop c を, 次のように定める path $c_1\colon[0,1]\to D$ 及び $c_2\colon[0,1]\to D$ の和 c_1+c_2 として (又は, c_1 の終点と c_2 の始点が同じであることを根拠にこの二つの path をつないでできる path として) 定義する:

$$c_1(t):=2e^{\pi i t},\qquad c_2(t):=4t-2.$$

ここで確かに $c_1(1)=-2=c_2(0)$ であり, さらに $c_2(1)=2=c_1(0)$ であるため, C が loop となることに注意する. (尚, ここで c_1 と c_2 を単に絵をかいて定義としているようなレポートを散見しました. 勿論黒板ではそのように簡易的に述べましたが, これはあくまで本レポートのヒントとしてです. また, 「正則関数の積分経路をしばしば絵で外形と始点・終点及び向きの情報だけを書いてその定義とすることがある」との旨は確かに述べましたが, それはあくまで Cauchy–Goursat の定理などを根拠に, 多少の経路の変更等には依存せず積分結果が定まることが分かっている状況だからこそ許されることです. とくに今回のレポートのような場合には, その趣旨に鑑みるに, 可能な限りきちんと path を明記することが望ましいと言えるでしょう. いずれにしても, c の像のみを図に書いてその向きの情報すら書かない, などは論外です. 気を付けてください)

さて, 以上の下で線積分

$$\int_c f(z)\,dz$$

が 0 でないことを示す (ことにより, 確かに被積分関数の正則性の仮定が Cauchy–Goursat の定理から落とせないことを確認する). まず $c=c_1+c_2$ より,

$$\int_c f(z)\,dz=\int_{c_1} f(z)\,dz+\int_{c_2} f(z)\,dz$$

である. Path c_1 の像が $\{z\in D\mid |z|=2\}$ に含まれ, またこの上で f は恒等的に 0 となるように構成していたことから,

$$\int_{c_1} f(z)\,dz=\int_{c_1} 0\,dz=0$$

を得る. 次に f が非負な実数に値をとること, 及び区間 $(c_1([1/4,3/4])=[-1,1]\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C})$ 上では $f\equiv 1$ なることに気を付ければ (また多少丁寧目に書くのであれば, $s(t):=4t-2$ として),

$$\int_{c_2} f(z)\,dz\left(=\int_0^1 f(s(t))\,\frac{ds}{dt}dt\right)=\int_{-2}^{2} f(s)\,ds\ge\int_{-1}^{1} f(s)\,ds=\int_{-1}^{1} ds=2>0$$

である. 以上より線積分 $\int_c f(z)\,dz$ の値は正な実数値であり, 特にこれは 0 でない. □

今回は「本講義では f が正則な場合を主に扱うが, **特に Cauchy–Goursat の定理のような結果が成立するためには f の正則性はそう簡単には緩められず, 特に C^∞ だったとしても一般にはダメである**」との話

題でした. とくに上記命題の様な C^∞ 関数の存在や上記の議論等を各自よく見直し, f についての仮定が C^∞ だけでは Cauchy–Goursat の定理のような結論は出得ないということを良く納得いただければ幸いです.

尚, その他今回ヒントで与えた方針とは別の方法で非常に簡明な例を挙げてくださったレポートがいくつかありました. 例えば内一つをご紹介すると, $f(z) := \mathrm{Re}\, z$ とし, また $c\colon [0, 2\pi] \to D$ を $c(t) := e^{\mathrm{i}t}$ とすることで,

$$\int_c f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (\mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t}) \cdot c'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\cos t) \cdot \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\,dt = -\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\,dt + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi\mathrm{i} \neq 0$$

を得る, 等です.

2 複素数値関数の regularity (連続性や滑らかさ) について

レポートの中で, 幾つか $\mathbb{C}$ 値関数の連続性や滑らかについて誤解している (又はあまり良く理解できていないように見える) 記述のあるものが散見しました. 今回の講義で正則関数の C^∞ 性を示したタイミングであるという意味でも良い機会なので, この際ここで $\mathbb{C}$ 値関数 (及び正則関数) の regularity について纏めておきましょう.

まず, 次が基本的です:

Lemma 2.1. *複素数平面の開集合 D 上の関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ を考える. その実部 $\mathrm{Re}\, f$ (f と $\mathrm{Re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ との合成関数のことであった) を u, 虚部 $\mathrm{Im}\, f$ を v と書くことにする: $u, v\colon D \to \mathbb{R}$. このとき, 任意の点 $z_0 \in D$ に対して, 以下は同値である:*
(i) 関数 f は z_0 で連続である.
(ii) 関数 u 及び関数 v はともに z_0 で連続である. □

証明は初めのレポートで各自にやって頂いたものではありますが, 念のため改めて記してきましょう:

Proof. まず (i) を仮定する. 正数 ε をとる. 仮定からある正数 δ として以下を満たすものが取れる: 任意の点 $z \in D$ について, $|z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. ここで $z \in D$ について

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u(z) - u(z_0))^2 + (v(z) - v(z_0))^2} \geq |u(z) - u(z_0)|$$

に気を付けると, 次を得る: 任意の点 $z \in D$ について, $|z - z_0| < \delta$ ならば $|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon$. 従って u は z_0 で連続である. v についても同様なので, (ii) を得る.

次に (ii) を仮定する. 正数 ε をとる. 仮定の内 u の z_0 に於ける連続性から, ある正数 δ_1 として以下を満たすものが取れる: 任意の点 $z \in D$ について, $|z - z_0| < \delta_1$ ならば $|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon/\sqrt{2}$. また, 仮定の内 v の z_0 に於ける連続性から, ある正数 δ_2 として以下を満たすものが取れる: 任意の点 $z \in D$ について, $|z - z_0| < \delta_2$ ならば $|u(z) - u(z_0)| < \varepsilon/\sqrt{2}$. 以下 $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とする. すると, 任意の点 $z \in D$ について, $|z - z_0| < \delta$ ならば

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{(u(z) - u(z_0))^2 + (v(z) - v(z_0))^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$$

となっている. よって (i) を得る. □

以上から, **複素数値関数の連続性判定は, その実部及び虚部の連続性判定に帰着される**ということが分かるわけです.

さて, 正則関数については, その性質としてまず連続性がすぐに分かるものでした. これについてもここでもう一度丁寧目に確認しておきましょう:

Lemma 2.2. *複素数平面の開集合 D 上の関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ を考える. 点 $z_0 \in D$ に於いて f が複素微分可能であるならば, f は z_0 で連続である.* □

Proof. 点 $z_0 \in D$ に於いて f が複素微分可能であるとする. 定義から, ある複素数 $a \in \mathbb{C}$ 及び正数 δ として, 次を満たすものがとれる: 任意の $z \in D \setminus \{z_0\}$ について, $|z - z_0| < \delta$ ならば

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a\right| < 1$$

である (所謂 “$\varepsilon-\delta$ 論法” の文脈に於ける極限の定義に於いて, ここでは “ε” に相当するものを 1 として取っている．またこのときの a こそが $f'(z_0)$ の定義であったことにも注意)．ここで $z \in D \setminus \{z_0\}$ として $|z-z_0| < \delta$ なるものについて, 三角不等式から

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leq \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - a\right| + |a| < 1 + |a|$$

であることに気を付けると, (辺々に $|z-z_0|$ を掛けることで) 不等式

$$|f(z)-f(z_0)| < (1+|a|)\cdot|z-z_0|$$

を得る．よって ($\{z \in D \mid |z-z_0| < \delta\}$ の中で) z が z_0 に近づけば, (近づき方によらず必ず) $|f(z)-f(z_0)|$ は 0 に収束することが分かる．即ち

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

であるので主張を得る． □

上の補題で, 特に正則関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ の実部 $u := \operatorname{Re} f$ 及び虚部 $v := \operatorname{Im} f$ も連続であることが, Lemma 2.1 からは分かることになります.

さて, 講義では, 複素平面の開集合 D 上の複素数値関数 f が C^r 級である ($1 \leq r \leq \infty$) とは, f の値域 $\mathbb{C}$ を実多様体 $\mathbb{R}^2$ と同一視した上でこれが C^r 級写像であること (又は, その実部 $u := \operatorname{Re} f$ 及び虚部 $v := \operatorname{Im} f$ が C^r 級関数であること) としていました．前回までの講義で正則関数の連続性を基に (特に正則関数の微分については連続性などは**仮定せずに**) Cauchy–Goursat の定理を示していました．また今回の講義で, その応用として Cauchy の (微) 積分公式を示し, 特に f が C^∞ 級であることを得ていたわけです．特に今回の講義の結果から, **複素平面のある領域上で定義された正則関数 f に対して，その実部 $u := \operatorname{Re} f$ 及び虚部 $v := \operatorname{Im} f$ が C^∞ 級関数であること**も分かったわけです．以上の議論の流れを各自良く復習し, 理解しておいてください.

尚, 2019 年 5 月 13 日の講義では, 次を示していました:

Theorem 2.3. 複素平面の領域 D 上で定義された正則関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ を考える．その実部 $u := \operatorname{Re} f$ 及び虚部 $v := \operatorname{Im} f$ が C^2 級であることを仮定する．このとき, u 及び v は調和関数である． □

この主張を述べる際に「u 及び v についての C^2 級という仮定は, 後に学ぶことから実は外せる」との旨を述べました．実際, 今回の講義で示した結果から, 特に u 及び v は C^2 級であることが (f の正則性から勝手に) 従うことが分かり, この仮定は外せると分かるわけです.

3 Path の取り換えや近似について

最後に, path の取り換えや近似に関する議論について補足を行います．以下 D を複素平面の領域とします．これまでの講義の中では, しばしば与えられた D の path c を, 別の path に取り換えてそれに沿っての線積分を考えたり, 別の path で近似したりといった議論を行ってきました．これらについては詳細に立ち入らず, 代わりに例えば [2] を参照ということにしてきました．ですが今回質問など頂きましたので, せっかくですので幾つかについて補足をしておこうと思います.

3.1 Path を取り換える議論について

例えば前回の講義の最後, 及び今回の講義の初めなどに, 次の主張を説明しました:

Corollary 3.1. *複素平面の単連結な領域 D 上で定義された正則関数 f を考える．このとき, D の二つの path $c_1\colon [a_1,b_1] \to D$ 及び $c_2\colon [a_2,b_2]$ が互いの始点及び終点を同じくするのであれば (つまり $c_1(a_1) = c_2(a_2)$ かつ $c_1(b_1) = c_2(b_2)$ であるならば),*

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$$

である．

やはりその証明の詳細は (c_1, c_2 は区分的に滑らかとは限らないので折れ線近似によりその線積分の値を定義するため, ホモトピーと折れ線に関する議論が必要なため) ここでは省略し説明は [2] に譲ることとします．ですがその証明の概略は, 講義でも述べた通り

Step 1: $c := c_1 - c_2$ を D の loop とみる.

Step 2: c を必要に応じて取り換えることで Jordan 閉曲線の場合に帰着される.

Step 3: c の内部は D に含まれることが分かり, 従って Cauchy–Goursat の定理から $0 = \int_c f(z)\,dz = \int_{c_1 - c_2} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz - \int_{c_2} f(z)\,dz$ を得る.

... という流れです. ここでは内 Step 2 を詳しく見ることで, どのようにして c が Jordan 閉曲線の場合に帰着されるのかを説明しましょう (その中で同時並行的に, Step 3 が随時現れます).

まず, $c := c_1 - c_2$ は折れ線 loop であるとしてよいことに注意します. これは

- そもそも c が区分的に滑らかな場合には, 講義で説明した通りの方法での十分細かい折れ線近似を考えれば, Cauchy–Goursat の定理からその近似折れ線に沿っての線積分の値が元の線積分の値と一致するためであり,
- また c が一般に連続な場合には, そもそも折れ線近似によって線積分の値を定義していたため

です (前者の理由から, 後者で述べたような c が一般に連続な場合の線積分の値の well-defined 性を得て定義が正当化されていたこともこの機に思い出しておいてください). 同様の理由で, 以下 c_1 及び c_2 も初めから折れ線 (正確には連続な折れ線, 以下これを単に折れ線と呼ぶ) であるとして議論を行います.

次を証明してみましょう:

Claim 3.2. *Path c_1 は区間 $[0,1]$ 上定義された折れ線であるとしてよく, また更に $c_1\colon [0,1] \to D$ は開区間 $(0,1)$ 上では単射であるとしてよい. より正確には, 像 $c_1([0,1])$ のある部分集合 L 及び連続単射 $\widehat{c}_1\colon [0,1] \to L$ として, $\widehat{c}_1(0) = c_1(0)$, $\widehat{c}_1(1) = c_1(1)$, $\widehat{c}_1([0,1]) = L$ かつ*

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{\widehat{c}_1} f(z)\,dz$$

なるものが存在する. □

Proof. まず Path c_1 は区間 $[0,1]$ 上定義された折れ線であるとしてよいことは明らか (区間 $[0,1]$ から区間 $[a_1, b_1]$ への同相写像 $t \mapsto (1-t)\cdot a_1 + t \cdot b_1$ との合成を考えよ. 線積分の定義 (と, 積分の変数変換の公式) からすぐに確かめられる通り, このようなパラメータの変換によっては線積分の値は変わらないことを講義でみていた). "折れ線" という言葉の定義から, ある分割

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$$

が存在して, また各 $\nu = 1, 2, \ldots, n$ に対してある複素数 $p_\nu, q_\nu \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$c_1(t) = p_\nu t + q_\nu \quad (\text{if} \ \ t_{\nu-1} \le t \le t_\nu)$$

と書ける.

まず, 各 ν で $p_\nu \neq 0$ としてよいことを示す. $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ をとる. もし $p_\nu = 0$ であれば,

$$c_1(t) \equiv q_\nu \quad (\text{if} \ \ t_{\nu-1} \le t \le t_\nu)$$

となる. ここで新しい path $\gamma_1\colon [0, 1/2] \to D$ 及び $\gamma_2\colon [1/2, 1] \to D$ を, それぞれ $\gamma_1(s) := c_1(2t_{\nu-1}s)$ $(0 \le s \le 1/2)$, $\gamma_2(s) := c_1((2-2t_\nu)s + 2t_\nu - 1)$ $(1/2 \le s \le 1)$ で定める. すると, c_1 は連続であったことに注意すると, $\gamma_1(1/2) = c_1(t_\nu - 1) = q_\nu = c_1(t_\nu) = \gamma_2(1/2)$ を得る. つまり γ_1 の終点と γ_2 の始点が一致しているので, これらをつなぐことで新しい連続な折れ線を得る. 以上の操作を必要に応じて有限回繰り返すことで, 新しい連続な折れ線 $\widehat{c}_1\colon [0,1] \to D$ として, 各線分の傾きが 0 でないようなものを得る. 初めからこれを c_1 としておくことで, 各 ν に対して $p_\nu \neq 0$ としてよいことが分かる (以上の操作は全て c_1 の像, 及び線積分 $\int_{c_1} f(z)\,dz$ の値を変えないものであることに注意).

次に, 主張を n についての帰納法によって示す. まず $n = 1$ のときは, $q_1 \neq 0$ より主張は明らかである. 主張が $n < N$ については示されたして, $n = N$ のときの証明を述べる. 折れ線 $c_1\colon [0,1] \to D$ を, 二つの折れ線

$$\gamma_1\colon [0, t_1] \to D$$

として $\gamma_1(t) := c_1(t)$ で定まるもの, 及び

$$\gamma_2\colon [t_1, 1] \to D$$

として $\gamma_2(t) := c_1(t)$ で定まるものに分割して考える. 明らかに γ_1 は線分である. また $q_1 \neq 0$ よりこれは単射である. また折れ線 γ_2 に含まれる線分の数は $N-1$ 個であり, 従って帰納法の仮定からこれは適切に別の折れ線 $\widehat{\gamma}_2$ に取り換えることにより, (その像は部分集合に変わるが線積分の値や始点・終点を変えないまま) 開区間 $(t_1, 1)$ 上では単射としてよい. 以下では記号が煩雑になるのを避けるため, 予め必要に応じて γ_2 を $\widehat{\gamma}_2$ と取り換えておき, γ_2 自体が開区間 $(t_1, 1)$ 上では単射であったとして話を続ける. もしこの γ_1 と γ_2 とをつないでできる折れ線が $(0, 1)$ 上で単射であれば, 示すことは何もない. そうでない場合には (γ_1 と $\gamma_2|_{(t_1,1)}$ の単射性に気を付けて), ある点 $s \in (t_1, 1)$ が存在して,

$$\gamma_2(s) \in \gamma_1([0, t_1])$$

となる. つまり開区間 $(t_1, 1)$ の部分集合

$$F := \{s \in (t_1, 1) \mid \gamma_2(s) \in \gamma_1([0, t_1])\}$$

は空集合でな無いことが分かる.

F が閉集合であることを示そう. そのために F の点列 $\{s_n\} \subset F$ として, $\mathbb{R}$ に於いてある点 s_∞ に収束するようなものをとる ($s_\infty \in F$ を示せばよい). まず γ_2 の連続性より, $\mathbb{C}$ の点列 $\{\gamma_2(s_n)\}_n$ は $\gamma_2(s_\infty)$ に収束することが分かる. 各 $\gamma_2(s_n)$ は F の定義から $\gamma_1([0, t_1])$ に入っており, また明らかに $\gamma_1([0, t_1])$ は $\mathbb{C}$ の閉集合であることから, $\gamma_2(s_\infty)$ も $\gamma_1([0, t_1])$ に入っていることが分かる. 従って再び F の定義から $s_\infty \in F$ を得る. 以上から F は閉集合である.

ここで, 仮に $p_2 = -p_1$ であったとしよう (この場合にはある実数 $t' \in (t_1, 1)$ として, $(t_1, t'] \subset F$ なるものが存在することが簡単に観察できる). しかしこのケースは, 実は次のような簡単な考察により排除できる. 実際, この場合は c_1 は $[0, t_2]$ 上で「$c_1(0)$ から出発し, 初め速度ベクトル p_1 で一定時間 ($= t_1$) 直進した後, 逆に同じ道をたどって帰ってきて $c_1(t_2)$ に至る」path であると説明できる. そこで初めから (この往復分を打ち消すように) c_1 を取り換えて, $[0, t_2]$ 上で初めから c_1 は, $c_1(0)$ と $c_1(t_2)$ とを速度ベクトル p_1 又は $-p_1$ のどちらかで直進しつなぐ path であるとして構わないことになるからである (以上はもちろん厳密に (つまりどのように c_1 を取り換えるかを式で) 記述できるが, かえって分かりずらくなるのでここでは避けることにする). 以上の取り換えを行った後では, c_1 の折れ線の数は $N-1$ 個となり, 帰納法の仮定から結論を得る.

よって $p_2 \neq -p_1$ として証明を続ければよいことが分かる. この場合には, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, $(t_1, t_2 + \varepsilon] \cap F = \emptyset$ となることが簡単な考察から分かる (折れ線 γ_2 の線分の内 $\gamma_2([t_1, t_2])$ と $\gamma_1([0, t_1])$ との交わりは, $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$ だけであるため. 尚, $N = 2$ であればここで証明は終わるので, 以降 $N > 2$ として議論を続ける). このことと F が閉集合であることから, F には最小値が存在することが分かる. これを s_2 とする. とりかたから明らかに $\gamma_2(s_2) \in \gamma_1([0, t_1])$ であるが, γ_1 の単射性から次が分かる: 元 $s_1 \in [0, t_1]$ として $\gamma_1(s_1) = \gamma_2(s_2)$ なるものが唯一存在する.

すると, c_1 は区間 $[s_1, s_2]$ に制限すると, loop になっていることが分かる. D は単連結であるのでこの loop に沿っての f の積分は, Cauchy–Goursat の定理から 0 になることが分かる (ここで実は一度既に Step 3 に立ち入っている. 正確にはここで次のような議論を暗に行っている: まず s_2 の最小性及び構成から, この loop が Jordan 閉曲線であることは明らか. ここから, この loop の内部の閉包が D に含まれることが分かる (感覚的には明らかであると納得できるかと思う. 詳しくは 2019 年 6 月 10 日の講義で補足する, 又は [3] の定理 3.6 も参照). 以上から Cauchy–Goursat の定理が適用できることが分かる). よって新しく path

$$\widehat{\gamma}_1 \colon [0, s_1] \to D$$

として $\widehat{\gamma}_1(t) := c_1(t)$ で定まるもの, 及び

$$\widehat{\gamma}_2 \colon [s_2, 1] \to D$$

として $\widehat{\gamma}_2(t) := c_1(t)$ で定まるものを考えると, 明らかにこれらは共に折れ線であり, かつ $\widehat{\gamma}_1$ の終点と $\widehat{\gamma}_2$ の始点とは一致している. 構成から明らかに $\widehat{\gamma}_1$ は線分 (つまり 1 つの線分から成る折れ線) であり, また $\widehat{\gamma}_2$ は高々$N-2$ 個の線分から成る折れ線である. よってこれらをつないでできる折れ線に帰納法の仮定を用いることで, 主張を得る. □

... このように Claim 3.2 は証明されます. 絵にかきながら証明を追ってもらえれば方針は分かりやすいのではないかと思いますが, 書いてみるとこのようにとても長くなるものです (そのため時間の関係上講義では詳細に立ち入れないのですが, 各自折に触れて自分でこのように詳細を詰めてみることを強くお勧めします).

さてこの Claim 3.2 は c_1 について主張しましたが, 勿論これは c_1 についてではなく c についても全く問題なく適用できます (loop である c よりも path である c_1 で示した方が一般性が高いためこちらで証明は書きました). これによって問題は, 折れ線 loop $c \colon [0, 1] \to D$ が開区間 $(0, 1)$ 上で単射な場合に帰着されました. この場合には c は

- もし開区間 $(0,1)$ の像 $c((0,1))$ が点 $c(0)=c(1)$ を含まなければ, c は Jordan 閉曲線であり,
- もし開区間 $(0,1)$ の像 $c((0,1))$ が点 $c(0)=c(1)$ を含むならば, $c(0)=c(1)=c(s)$ なる $s\in(0,1)$ を用いて c を二つの Jordan 閉曲線へと分割できる

ということが分かります. これで Step 2 が完結します. □

3.2 Path を近似する議論について

ここでも, 複素平面の領域 D を一つ固定して考えます. 講義ではしばしば, 与えられた path $c\colon[0,1]\to D$ を, 別のパラメータ付きの path $c_\varepsilon\colon[0,1]\to D$ で近似して線積分の計算を行うことが良くあります ($\varepsilon\to 0$ で, c_ε は c に少なくとも各点収束するような状況が典型的. 例えば講義の中で Cauchy の積分公式の証明の際に, 一般に与えられた loop c 上の線積分を, 半径の小さな円周上の loop 上の線積分に帰着する際に行った議論等). ここでは, 時間の関係上あまり詳しく講義中で説明できなかった, このような議論についての詳細を見てみましょう.

3.2.1 一様連続・一様収束, 及び積分とその極限

まず, 基本となるのは以下の事実です:

Proposition 3.3. *実数直線内の閉区間 $I=[a,b]$ をとる $(a,b\in\mathbb{R}, a\le b)$. をとする. このとき以下が成立する:*
(i) 閉区間 I 上の任意の連続関数 $g\colon I\to\mathbb{C}$ は, I 上リーマン可積分である.
(ii) 各 $(n=1,2,\ldots$ について $g_n\colon I\to\mathbb{C}$ をそれぞれ連続関数とする. さらに, $n\to\infty$ で g_n は, ある関数 $g\colon I\to\mathbb{C}$ に一様収束しているとする. このとき g も I 上連続関数であり, 従って I 上リーマン可積分である. さらに以下が成立する:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt.$$

□

ともに微積分の講義ですでに学んでいる筈ですが, ごく簡単に証明の仕方をおさらいしておきましょう. まず (i) については, 閉区間上の連続関数は一様連続であることから分かります. より一般に:

Lemma 3.4. *コンパクト距離空間 (X,d) 上の連続関数 $g\colon X\to\mathbb{C}$ は, 一様連続である. つまり, 任意の正数 ε に対して, (点たち $x,y\in X$ の選び方によらない) ある正数 δ が存在し, 任意の元 $x,y\in X$ に対して*

$$d(x,y)<\delta\implies|g(x)-g(y)|<\varepsilon$$

が成立する.

Proof. 正数 ε をとる. すると g の (各点上に於ける) 連続性から次が分かる: 各点 $z\in X$ に対して, ある正数 δ_z が存在し, 任意の $x\in X$ に対して次が成立する:

$$d(x,z)<\delta_z\implies|g(x)-g(z)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

各点 $z\in Y$ に対してその開近傍 U_z を

$$U_z:=\left\{x\in X\,\middle|\,d(x,z)<\frac{\delta_z}{2}\right\}$$

で定める. $\{U_z\}_{z\in X}$ は明らかに X の開被覆であるので, X のコンパクト性より次が分かる: ある有限点 $z_1,z_2,\ldots,z_N\in X$ として,

$$X=\bigcup_{j=1}^N U_{z_j}$$

なるものがとれる. ここで

$$\delta:=\frac{1}{2}\min\{\delta_{z_1},\delta_{z_2},\ldots,\delta_{z_N}\}$$

により正数 δ を定める．

さて, $x, y \in X$ が $d(x,y) < \delta$ であったとしよう．すると, 点 $z_1, z_2, \dots, z_N \in X$ の選び方により, ある $\nu \in \{1, 2, \dots, N\}$ について $x \in U_{z_\nu}$ となっていることが分かる．これは特に $d(x, z_\nu) < \delta_{z_\nu}/2$ を含意することに注意する．さらに三角不等式と δ の定義に気を付けると,

$$d(y, z_\nu) \leq d(y, x) + d(x, z_\nu) < \delta + \frac{\delta_{z_\nu}}{2} \leq \frac{\delta_{z_\nu}}{2} + \frac{\delta_{z_\nu}}{2} = \delta_{z_\nu}$$

を得る．従って x も y も, ともに同じ点 z_ν からの距離が δ_{z_ν} 未満であることが分かった．以上と δ_{z_ν} のとりかたから,

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(z_\nu)| + |g(z_\nu) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

を得る． □

Proposition 3.3 の (i) は, この補題から保証される g の一様連続性に気を付けると見通しよく証明できます (ここではこれ以上の詳細には立ち入らないので, 各自必要に応じて復習してください).

次に (ii) について．連続関数の一様収束極限が連続であることは, よく "$\varepsilon - \delta$ 論法" の演習にもなっていますし, ご記憶の方も多いのではないでしょうか? ここでは詳細は証明しますが, 忘れていた方は良く復習しておいてください．

また, "一様収束" という言葉・概念自体も今後本講義でも非常に頻出します．(ii) では連続関数列 $\{g_n\}$ が g という関数に I 上一様収束している状況でしたが, これはつまり

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in I} |g_n(t) - g(t)| = 0$$

となっていることを意味していました．さらに言えば, 今 g_n も g も連続であるため, $x \mapsto |g_n(x) - g(x)|$ によって定まる I 上 $\mathbb{R}$ 値関数も連続であり, 従って (上では "sup" と書いたものの実際には) この関数には最大値が存在する状況であることが分かります．つまり

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in I} |g_n(t) - g(t)| = 0$$

と言ってもよい状況であることが分かります．いずれにしても今の場合, 各 n ごとに非負実数 M_n を $M_n := \max_{x\in I} |g_n(x) - g(x)|$ と定めれば, これは $n \to \infty$ で 0 に収束することが分かっていることになります．そこで

$$\left| \int_a^b g_n(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \right| = \left| \int_a^b (g_n(t) - g(t))\,dt \right| \leq \int_a^b |g_n(t) - g(t)|\,dt \leq M_n \int_a^b dt = (b-a)M_n$$

に気を付ければ,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b g_n(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt \right| = 0,$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt$$

を得るわけです． □

3.2.2 Path を近似する議論について

改めて, $D \subset \mathbb{C}$ の領域とします．関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ を連続なものとしてここでは一つ固定して考えましょう．与えられた path $c\colon [0,1] \to D$ を, 別のパラメータ付きの path $c_\varepsilon\colon [0,1] \to D$ で近似して線積分の計算を行う状況を考えます．実はこれまで講義で出てきたそのような状況は, より詳しく次のような状況になっています (正確には字面通りにはそうでないこともありますが, 例えば c が区分的に滑らかだが滑らかでない場合には c を有限個に分割しそのそれぞれ (滑らかな path) を考えたり, 又は必要に応じて c の折れ線近似を考える (さらにその一つ一つの線分に着目する) ことで次の場合に簡単に帰着できます):

【設定】 ある正数 $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, 各 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ について C^∞ 級の path $c_\varepsilon \colon [0,1] \to D$ が定まっている. さらにそれらの各点収束先の (もともと考えていた) path $c \colon [0,1] \to D$ も C^∞ 級である. またさらに, 関数 $H_1 \colon [0,1] \times [0, \varepsilon_0] \to D$ 及び $H_2 \colon (0,1) \times [0, \varepsilon_0] \to D$ をそれぞれ

$$H_1(t, \varepsilon) := \begin{cases} c(t) & (\varepsilon = 0) \\ c_\varepsilon(t) & (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

及び

$$H_2(t, \varepsilon) := \begin{cases} c'(t) \ \left(= \frac{dc}{dt}(t)\right) & (\varepsilon = 0) \\ c'_\varepsilon(t) \ \left(= \frac{dc_\varepsilon}{dt}(t)\right) & (0 < \varepsilon \le \varepsilon_0) \end{cases} \qquad (0 < t < 1)$$

で定めると, これらは $[0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ 上連続である (特に H_2 については, この関数を定義域の境界上へ連続に伸ばせるということも含意している). $\square$

以下, この設定の下で

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_\varepsilon} f(z)\, dz = \int_c f(z)\, dz$$

なることを示しましょう. ここで線積分の定義から, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ なる各 ε については

$$\int_{c_\varepsilon} f(z)\, dz = \int_0^1 (f \circ H_1(t, \varepsilon)) \cdot H_2(t, \varepsilon)\, dt$$

であり, また同様に

$$\int_c f(z)\, dz = \int_0^1 (f \circ H_1(t, 0)) \cdot H_2(t, 0)\, dt$$

であることに気を付けると, 結局示すべきは

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 (f \circ H_1(t, \varepsilon)) \cdot H_2(t, \varepsilon)\, dt = \int_0^1 (f \circ H_1(t, 0)) \cdot H_2(t, 0)\, dt,$$

と言い換えられます. 見やすくするために, 新しい関数 $G \colon [0,1] \times [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{C}$ を

$$G(t, \varepsilon) := (f \circ H_1(t, \varepsilon)) \cdot H_2(t, \varepsilon)$$

で定めます. すると先ほど述べた示すべき等式は,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 G(t, \varepsilon)\, dt = \int_0^1 G(t, 0)\, dt,$$

と言い換えられます. ここで【設定】内の条件と G の構成から, G が $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合 $[0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ 上の連続関数であることに注意しましょう.

Lemma 3.5. 上記設定の下,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 G(t, \varepsilon)\, dt = \int_0^1 G(t, 0)\, dt,$$

が成立する. このことと上記の議論により, 上で述べた【設定】の下で等式

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c_\varepsilon} f(z)\, dz = \int_c f(z)\, dz$$

の成立も特に分かる. $\square$

Proof. ここまでの議論から, 示すべきは前半の主張のみで十分である. 有界閉集合 $[0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ 上の $\mathbb{R}$ 値関数 $\widehat{G}$ を新たに

$$\widehat{G}(t, \varepsilon) := |G(t, \varepsilon) - G(t, 0)|$$

で定義する. G の連続性から, この $\widehat{G}$ も $[0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ 上連続であることが分かる. ここで定義域 $[0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ がユークリッド距離でコンパクトであることに気を付けると, Lemma 3.4 より $\widehat{G}$ の一様連続性が分かる. よっ

て, 任意の正数 r に対し, ある正数 δ が存在して次が成立する: 任意の点 $(t_1, \varepsilon_1), (t_2, \varepsilon_2) \in [0,1] \times [0, \varepsilon_0]$ に対し,

$$|t_1 - t_2|^2 + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 < \delta^2 \implies \left|\widehat{G}(t_1, \varepsilon_1) - \widehat{G}(t_2, \varepsilon_2)\right| < r$$

が成立する. 特に任意の $t \in [0,1]$ に対し, 正数 ε がもし $\varepsilon < \delta$ であれば, 二点 $(t, 0)$, (t, ε) にこれを適用することで (また構成から明らかに $\widehat{G}(t, 0) = 0$ であることにも注意して),

$$\left|\widehat{G}(t, \varepsilon)\right| = \left|\widehat{G}(t, 0) - \widehat{G}(t, \varepsilon)\right| < r$$

を得る. ここから直ちに, $\varepsilon < \delta$ なる任意の正数 ε について

$$\max_{t \in [0,1]} |G(t, \varepsilon) - G(t, 0)| = \max_{t \in [0,1]} \left|\widehat{G}(t, \varepsilon)\right| < r$$

なることが従う. 結局以上を纏めると,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \max_{t \in [0,1]} |G(t, \varepsilon) - G(t, 0)| = 0$$

が分かる. つまり連続関数 $G(-, \varepsilon)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ は, 関数 $G(-, 0)\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ に $\varepsilon \to 0$ で一様に収束していることが分かった. 以上と Proposition 3.3 から主張は従う. □

References

[1] 松本 幸夫, 多様体の基礎 (基礎数学 5), 東京大学出版会 (1988).

[2] 野口 潤次郎, 複素解析概論 (数学選書), 裳華房 (1993).

[3] 高橋 礼司, 複素解析 (基礎数学), 東京大学出版会 (1990).